中值定理与导数的应用习题课

刘则毅

深圳大学数学与计算科学学院

zeyiliu@szu.edu.cn

中值定理与导数的应用

- 微 分 中 值 定 理
- 洛 必 达 法 则. . .
- 函 数 单 调 性 的 判 别. . .
- 函 数 的 极 值 与 最 值. . .
- 函 数 的 凸 性、拐 点 与 渐 近 线. . .
- 函 数 作 图

1 微分中值定理

☞. . 基本概念与有关定理

- 罗尔中值定理 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且$f(a) = f(b)$,则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = 0$$

- 拉格朗日中值定理 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- 柯西中值定理 设函数$f(x)$与$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且

$$g'(x) \neq 0, \;\; x \in (a,b)$$

则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

✦上述三个定理都是充分性条件，而不是充要条件

☞ . . 例题

✿例：验证下列函数在指定区间上是否满足罗尔定理条件？若不满足，说明其理由；若满足，求出定理中的点ξ

- $f(x)=\frac{1+x^2}{x}, [-3,3]$
  不满足，$f(x)$在0不连续
- $f(x)=|x|, [-1,1]$
  不满足，$f(x)$在0不可导
- $f(x)=x^2$,[-5,5]
  满足，$\xi=0$
- $f(x)=x\sqrt{6-x}, [0,6]$
  满足，$\xi=4$

- 例：验证函数$f(x)=e^x$在区间$[a,b](a<b)$上满足拉格朗日中值定理条件，并求出定理中的ξ

  $f'(x)=f(x)=e^x$是初等函数，从而区间$[a,b](a<b)$上满足拉格朗日中值定理条件，

  $$e^{\xi}=\frac{e^b-e^a}{b-a}$$

  从而

  $$\xi=\ln(\frac{e^b-e^a}{b-a})$$

- 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，试证，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

  $$[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]\,\xi^{n-1}=\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{b-a}$$

  证：设$g(x)=x^n f(x)$，函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，则$g(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，

  $$g'(x)=nx^{n-1}f(x)+x^n f'(x)$$

从而至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$[nf(\xi)+\xi f'(\xi)]\,\xi^{n-1}=\frac{b^n f(b)-a^n f(a)}{b-a}$$

- 设$0<a<b$，函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，试证，则至少存在一点$\xi \in (a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=\xi f'(\xi)\ln\frac{b}{a}$$

证：令$g(x)=\ln x$，则$f(x),g(x)$闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)内可导，且

$$g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0, x\in(a,b)\subset(0,+\infty)$$

$f(x),g(x)$满足柯西中值定理的条件，于是存在$\xi \in (a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$$\xi f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{\ln(b)-\ln(a)}$$

访问主页
标题页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 7 页 共 39 页
返回
全屏显示
关闭
退出

2 洛必达法则. . .

☞. . 基本概念与有关定理

如果极限$\lim f(x) = \lim g(x) = 0$或$\infty$，则极限$\lim \frac{f(x)}{g(x)}$可能存在也可能不存在，通常称这种类型的极限为$\frac{0}{0}$或$\frac{\infty}{\infty}$型不定式

- $\frac{0}{0}$型不定式

定理：设函数$f(x), g(x)$满足下列条件

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$;
2. 在点a的某空心邻域内可导，且$g'(x) \neq 0$
3. $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$或$\infty$

则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A\text{或}\infty$$

访问主页
标题页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 8 页 共 39 页
返回
全屏显示
关闭
退出

- $\frac{\infty}{\infty}$型不定式

定理：设函数$f(x), g(x)$满足下列条件

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$；
2. 在点a的某空心邻域内可导，且$g'(x) \neq 0$
3. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$或$\infty$

则

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A\text{或}\infty$$

- 其它类型的不定式$0 \cdot \infty$型，$\infty - \infty$型，0^0型，1^∞和∞^0型，先将其转化为上面的两种类型，再求解

访问主页
标题页
第 9 页 共 39 页
返回
全屏显示
关闭
退出

☞ . . 例题

✿求下列极限

- $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$

  解： $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x-x}{e^x+x}$

  解： $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x-x}{e^x+x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x-1}{e^x+1}=1$

- $\lim\limits_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}$

  解： 此题为$0\cdot\infty$型的不定式，令$u=\frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0}x^2e^{1/x^2}=\lim_{u\to +\infty}\frac{e^u}{u}=\lim_{u\to +\infty}e^u=+\infty$$

- $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}$

  解：此题为$0\cdot\infty$型的不定式

  $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\frac{\pi x}{2}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{\cot\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi x}{2}}=-\frac{2}{\pi}\lim\limits_{x\to1}\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}$

- $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

  解：此题为$\infty-\infty$型的不定式

  $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x-(x-1)}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{\ln x+(x-1)/x}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x\ln x}{x\ln x+x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x+1}{\ln x+2}=\frac{1}{2}$

- $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{e}(1+x)^{1/x}\right]^{1/x}$

  解：此题为1^∞型的不定式

  $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{e}(1+x)^{1/x}\right]^{1/x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]}$，**其中**

  $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1\right]=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x+1}-1}{2x}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{1+x}=-\frac{1}{2}$

  原式$=e^{-1/2}=\frac{1}{\sqrt{e}}$

3 函数单调性的判别. . .

☞. . 基本概念与有关定理

☞定理：设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导

- 如果$f'(x)>0, x\in(a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上单调递增
- 如果$f'(x)<0, x\in(a,b)$，则$f(x)$在$[a,b]$上单调递减

✍推论：如果函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)=0, x\in(a,b)$，则$f(x)\equiv C$(常数)

☞. . 例题

✿ 证明方程x^3+2x+1在$(-1,0)$内存在唯一的实根

证：设$f(x)=x^3+2x+1$，则$f(x)$在闭区间$[-1,0]$上连续，在$(-1,0)$内可导，$f(-1)=-2, f(0)=1$，因此由闭区间上连续函数的性质存在$\xi\in(-1,0)$使得$f(\xi)=0$，又由于$f'(x)=3x^2+2>0$，$f(x)$在$[-1,0]$上单调递增，从而在$(-1,0)$内存在唯一的实根

✿证明恒等式

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$$

证：设$f(x)=\arctan x+\operatorname{arccot} x$，则

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$$

微分中值定理
洛必达法则. . .
函数单调性的判...
函数的极值与最...
函数的凸性、拐点...
函数作图
访问主页
标题页
第 13 页 共 39 页
返回
全屏显示
关闭
退出

由推论$f(x) \equiv C$(常数) 又因为

$$f(0) = \frac{\pi}{2}$$

所以

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2}$$

✿求函数$f(x) = (x-1)x^{2/3}$的单调区间

解：该函数的定义域为$D(f) = (-\infty, +\infty)$

$$f'(x) = x^{2/3} + \frac{2}{3}(x-1)x^{-1/3} = \frac{1}{3}(5x-2)x^{-1/3}$$

驻点为$x_1=\frac{2}{5}$，导数不存在的点为$x_2=0$，
因为$x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$时，$f'(x)>0$，
$x\in\left(0,\frac{2}{5}\right)$，时$f'(x)<0$
所以，$(-\infty,0)$或$\left(\frac{2}{5},+\infty\right)$为$f(x)$的单调增加区间，$\left(0,\frac{2}{5}\right)$为$f(x)$的单调递减区间

✿利用函数的单调性，证明不等式$\frac{2x}{\pi}<\sin x<x,0<x<\frac{\pi}{2}$
证明：待证明的不等式等价于不等式

$$\frac{2}{\pi}<\frac{\sin x}{x}<1,0<x<\frac{\pi}{2}$$

令$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，则

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{\cos x}{x^2}(x-\tan x)$$

因为在$(0,\frac{\pi}{2})$内$\frac{\cos x}{x^2}>0$，从而$f'(x)$与$x-\tan x$同号，令

$$g(x)=x-\tan x$$

则

$$g'(x)=1-\sec^2 x=-\tan^2 x<0$$

又

$$g(0)=0,g(x)<g(0),\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

得$g(x)<0,x\in(0,\frac{\pi}{2})$，于是在$(0,\frac{\pi}{2})$内$f'(x)<0$，$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$内单调减少

$$f(x)>\lim_{x\to(\pi/2)^-}f(x)=\frac{2}{\pi}$$

访问主页
标题页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 16 页 共 39 页
返回
全屏显示
关闭
退出

$$f(x) < \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

即有

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

亦即

$$\frac{2x}{\pi} < \sin x < x, 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

4 函数的极值与最值. . .

☞. . 基本概念与有关定理

☞定义：设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义

- 若对该邻域内的任意一点$x \neq x_0$，恒有$f(x) < f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的极大值，点x_0为$f(x)$的极大值点
- 若对该邻域内的任意一点$x \neq x_0$，恒有$f(x) > f(x_0)$，则称$f(x_0)$为函数$f(x)$的极小值，点x_0为$f(x)$的极小值点

访问主页
标题页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第 18 页 共 39 页
返回
全屏显示
关闭
退出

✦函数的极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为极值点

☞定理：设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，点x_0是$f(x)$的极值点的必要条件是：

$$f'(x_0)=0\text{或}f'(x_0)\text{不存在}$$

☞定理：

充分条件I：设函数$y = f(x)$在点x_0连续，且在点x_0的某空心邻域内可导

1. 如果在点x_0的左邻域内$f'(x) > 0$，在点x_0的右邻域内$f'(x) < 0$，则x_0是$f(x)$的极大值点
2. 如果在点x_0的左邻域内$f'(x) < 0$，在点x_0的右邻域内$f'(x) > 0$，则x_0是$f(x)$的极小值点
3. 如果在点x_0的某空心邻域内$f'(x)$恒为正或恒为负，则x_0不是$f(x)$的极值点

充分条件II：设x_0是函数$f(x)$的驻点，二阶导数$f''(x_0)$存在，且$f''(x_0) \neq 0$则

- 当$f''(x_0) < 0$时，点x_0是$f(x)$的极大值点
- 当$f''(x_0) > 0$时，点x_0是$f(x)$的极小值点

访问主页
标题页
第 21 页 共 39 页
返回
全屏显示
关闭
退出

求极值的步骤如下：

1. 求导数$f'(x)$；
2. 由$f'(x) = 0$求出全部驻点；
3. 求出导数不存在的点
4. 由充分条件检验各点是否为极值点
5. 求出函数的每个极值点处的极值

☞. . 例题

✿求函数$y = x - \frac{3}{2}(x-2)^{2/3}$的极值

解：函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，由

$$f'(x) = 1 - (x-2)^{-1/3}$$

得驻点$x_1 = 3$不可导点$x_2 = 2$，因为

$$\begin{aligned} x < 2\text{时} \quad & f'(x) > 0 \\ 2 < x < 3\text{时} \quad & f'(x) < 0 \\ x > 3\text{时} \quad & f'(x) > 0 \end{aligned}$$

所以

$x_1 = 3$为极小值点，极小值为$f(3) = \frac{3}{2}$

$x_2 = 2$为极大值点，极大值为$f(2) = 2$

✿求函数$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 75$的极值

解：函数的定义域为$(-\infty, +\infty)$，

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 45 = 3(x+3)(x-5)$$

得驻点为$x_1 = -3, x_2 = 5$，

$$f''(x) = 6x - 6$$

得$f''(-3) = -24 < 0,\ f''(5) = 24 > 0$，

从而$x_1 = -3$为极大值点，极大值为156，$x_2 = 5$为极小值点，极小值为-100

✿求函数$y = x^3 - 3x^2 - 45x + 75$在区间$[0, 6]$上的最大与最小值

解：由上题，比较$f(0) = 75, f(5) - 100, f(6) - 87$，知最大值为75，最小值为-100

✿设某工厂生产某种产品的总成本函数为

$$C(x) = 0.5x^2 + 36x + 9800\text{元}$$

求平均成本最小时的产量x，以及最小成本

解：平均成本函数为

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = 0.5x + 36 + \frac{9800}{x}$$

由

$$\overline{C}'(x) = 0.5 - \frac{9800}{x^2} = 0$$

得驻点$x_0 = 140$，因为

$$\overline{C}''(x) = \frac{19600}{x^3} > 0(x > 0)$$

所以，$x_0 = 140$为$\overline{C}(x)$的最小值点，即每天生产140个单位的产品，平均成本最，最小平均成本为176元

5 函数的凸性、拐点与渐近线

☞. . 基本概念与有关定理

☞定义：设函数$f(x)$在区间I上连续

- 若对任意$x_1, x_2 \in I(x_1 < x_2)$与$\lambda \in (0,1)$有

$$f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] < \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

则称曲线$y = f(x)$是下凸的，区间I为下凸区间

- 若对任意$x_1, x_2 \in I(x_1 < x_2)$与$\lambda \in (0,1)$有

$$f\left[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\right] > \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

则称曲线$y = f(x)$是上凸的，区间I为上凸区间

☞定义，如果曲线$y=f(x)$上一动点沿曲线无限远离原点时，该动点与直线L的距离趋于零，则称直线L为曲线$y=f(x)$的渐近线

渐近线分为水平渐近线，垂直渐近线与斜渐近线

- 如果

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=C \text{ 或 } \lim_{x\to+\infty} f(x)=C, \text{ 或 } \lim_{x\to-\infty} f(x)=C$$

  则称直线$y=C$为曲线$y=f(x)$的水平渐近线

- 如果

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\infty \text{ 或 } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$$

  则称直线$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的垂直渐近线

- 设a, b为常数，且$a \neq 0$，如果

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ 或 } \lim_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

则称直线

$$y = ax + b$$

为曲线$y = f(x)$的斜渐近线

☞. . 例题

✿例：求函数$y=\frac{x}{(x+1)^2}$的凸性区间及拐点

解：函数的定义域为$(-\infty,-1)\bigcup(-1,+\infty)$

$$y'=\frac{(x+1)^2-2x(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{1-x}{(x+1)^3}$$

$$y''=\frac{2x-4}{(x+1)^4}$$

令$y''=0$，得$x_0=2$，当$x=-1$时，y''不存在，因为

$$\begin{array}{rl} x < -1\text{时} & y'' < 0 \\ -1 < x < 2\text{时} & y'' < 0 \\ 2 < x < +\infty\text{时} & y'' > 0 \end{array}$$

所以，$(-\infty, -1)$与$(-1, 2)$为凸区间，$(2, +\infty)$ 为凹区间，$(2, \frac{2}{9})$为拐点

✿例：求下列曲线的渐近线

- $y = x + \frac{1}{x}$

  解：

$$\lim_{x\to\infty}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x + \frac{1}{x}\right) = \infty$$

$$a=\lim_{x\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(y-ax)=\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{x}-x\right)=0$$

所以，该曲线无水平渐近线，有一条垂直渐近线$x=0$与一条斜渐近线$y=x$

- $y=\frac{1}{x}\ln(1+x)$

  解：定义域为$(-1,0)\bigcup(0,+\infty)$，因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=0$$

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^2}=0$$

所以，该曲线无斜渐近线，有一条垂直渐近线$x=-1$与一条水平渐近线$y=0$

6 函数作图

☞. . 基本概念与有关定理

利用微分学知识作函数图形的基本步骤如下

1. 确定函数$y = f(x)$的定义域，判断其奇偶性和周期性；
2. 求出$f'(x) = 0$与$f''(x) = 0$的点，以及$f'(x)$与$f''(x)$不存在的点；
3. 以（2）中求出的点为分界点，将$f(x)$的定义域划分成若干个子区间，并列表讨论$f'(x)$与$f''(x)$在各子区间的符号，从而确定曲线$y = f(x)$在各子区间内的升降与极值点、凸性与拐点
4. 讨论曲线$y = f(x)$的渐近线
5. 在坐标平面上描出曲线$y = f(x)$上的几个特殊点，并根据（1）—（4）得出的曲线特征作图

☞. . 例题

✿作出下列函数的图形

- $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$

  解：定义域为$(-\infty,+\infty)$

$$y'=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$$

$$y''=2x-2$$

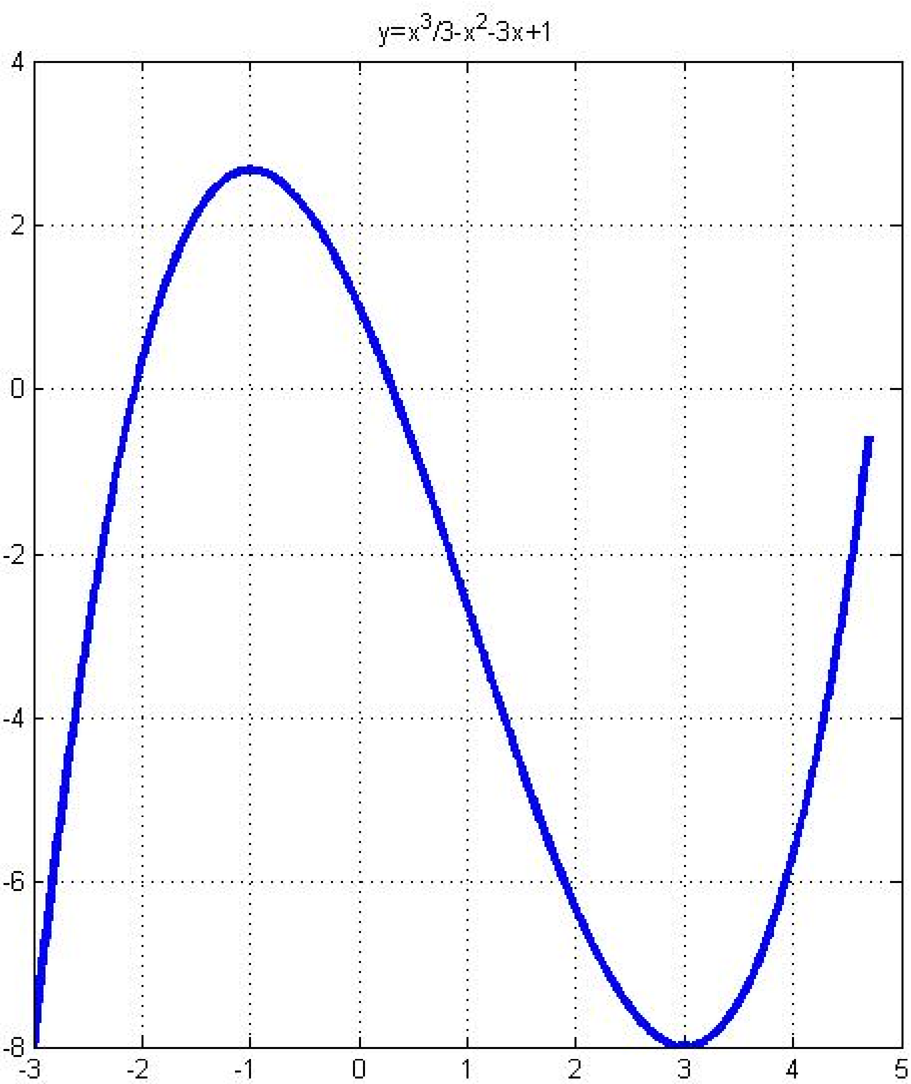
令$y'=0$得$x_1=-1,x_2=3$；令$y''=0$，得$x_3=1$

以$x=-1,1,3$为分界点，划分定义域$D(f)$，并列表

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	(1,3)	3	$(3,+\infty)$
y'	$+$		$-$		$-$		$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y	$\nearrow\frown$	极大值$\frac{8}{3}$	$\searrow\frown$	拐点 $(1,-\frac{8}{3})$	$\searrow\smile$	极小值-8	$\nearrow\smile$

该曲线无渐近线

微分中值定理
洛必达法则. . .
函数单调性的判...
函数的极值与最...
函数的凸性、拐点...
函数作图
访问主页
标题页
第 35 页 共 39 页
返回
全屏显示
关闭
退出



微分中值定理
洛必达法则. . .
函数单调性的判...
函数的极值与最...
函数的凸性、拐点...
函数作图

访问主页
标题页
◀◀ ▶▶
◀ ▶
第36页共39页
返回
全屏显示
关闭
退出

- $y=\frac{x^2}{1+x}$

解：定义域为$(-\infty,-1)\bigcup(-1,\infty)$

$$y'=\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}=\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$y''=\frac{2(x+1)^3-2x(x+2)(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{2}{(x+1)^3}$$

令$y'=0$得$x_1=0,x_2=-2$；$x_3=-1$时，y'和y''都不存在

以$x=-2,1,0$为分界点，划分定义域$D(f)$，并列表

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	$+$		$-$		$-$		$+$
y''	$-$		$-$		$+$		$+$
y	$\nearrow\frown$	极大值 -4	$\searrow\frown$		$\searrow\smile$	极小值0	$\searrow\smile$

因为

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to(-1)} y = \lim_{x\to(-1)}\frac{x^2}{(x+1)} = \infty$$

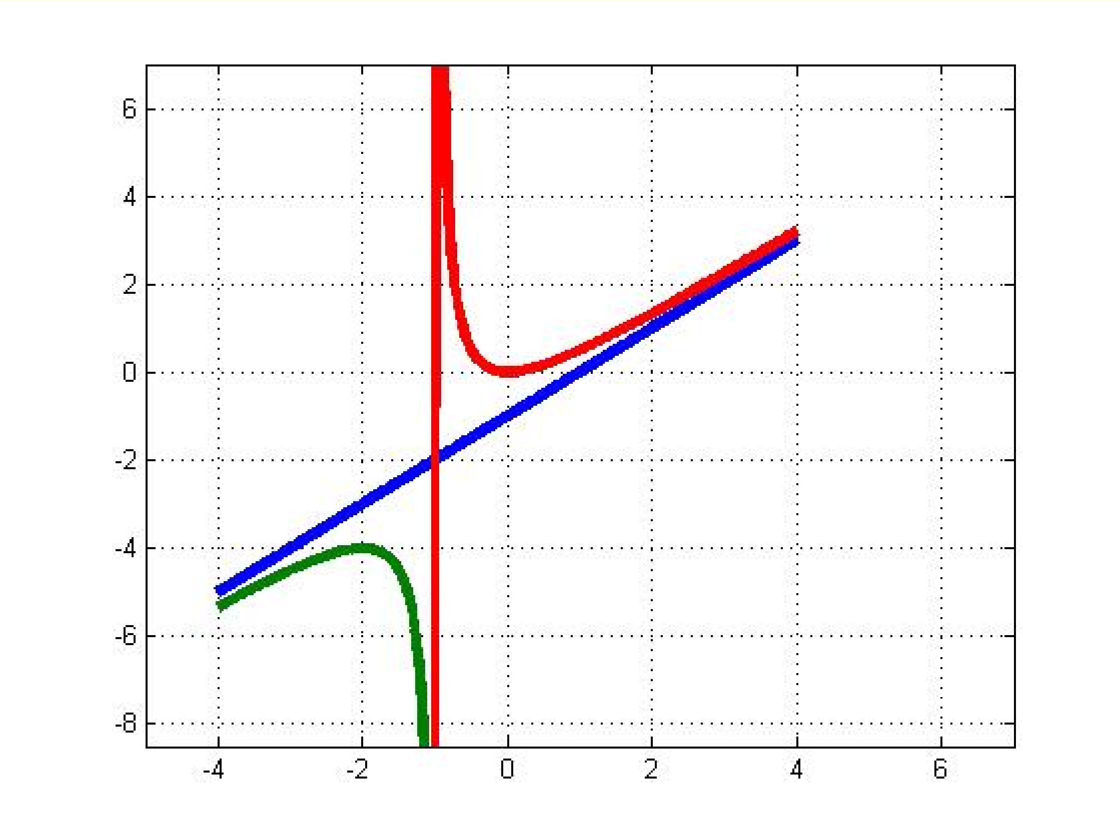
$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x(x+1)} = 1$$

$$b = \lim_{x\to\infty}(y-ax) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+1} - x\right) = -1$$

所以，曲线无水平渐近线，有

垂直渐近线：$x=-1$；

斜渐近线：$y=x-1$



访问主页
标题页

返　回
全屏显示
关　闭
退　出